Tentamen Functionaalanalyse, 2008–2009

Datum : 30-06-2009, 9.00–12.00 uur.

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. (a) Definiëer de volgende deelverzameling van $C([a,b])$:

   $$V = \{f \in C([a,b]) \mid f(a) = f(b)\}$$

   met de gebruikelijke supnorm $||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Bewijs dat V een gesloten lineaire deelruimte is.

   (b) Definiëer nu de volgende deelverzameling van $C([a,b])$:

   $$W = \{f \in C([a,b]) \mid f(a) > 0\},$$

   weer met de gebruikelijke supnorm. Bewijs dat W niet gesloten is. Is W volledig ?

2. Definiëer de lineaire operatoren T, S van $C([0,1])$ naar $C([0,1])$ (met de gebruikelijke supnorm) als volgt

   $$Tx(s) = s\int_0^1 x(t)dt, \quad s \in [0,1]$$

   $$Sx(s) = sx(s), \quad s \in [0,1]$$

   (a) Bepaal de eigenwaarden van beide lineaire operatoren.

   (b) Bepaal $||T||$ en $||S||$.

   (c) Beschouw de lineaire operator TS. Toon aan dat TS begrensd is, en bepaal de norm $||TS||$. Is $I - TS$ inverteerbaar in $B(C([0,1]))$?

3. Zij K een gesloten deelruimte van een Hilbertruimte H met inprodukt $< \cdot, \cdot >$. Definiëer voor iedere $x \in H$ de uitdrukking $y = Px$ als het unieke punt $y \in K$ waarvoor $x = y + z$ met $z \in K^\perp$.

   (a) Toon aan dat dit een lineaire operator $P : H \to K$ definiëert.

   (b) Toon aan dat $||P|| = 1$ en dat $PP = P$. Wat is de spectraalstraal van P ? Wat zijn de eigenwaarden van P ?

   (c) Toon aan dat $\ker(P) = K^\perp$ en $\text{range}\,(P) = K$.

4. Beschouw een Hilbertruimte H met inprodukt $< \cdot, \cdot >$ en bijbehorende norm $|| \cdot ||$.

   (a) Bewijs dat als $||x_n|| \to ||x||$ en $< x_n, x > \to < x, x >$ voor $n \to \infty$, dat dan $x_n \to x$.

(b) Zij $T : H \to H$ een lineaire operator. Definieer de geadjungeerde lineaire operator $T^* : H \to H$ zodanig dat

$$< Tx, y > = < x, T^*y >$$

voor alle $x, y \in H$. Toon aan T^* een lineaire operator is.

(c) Neem $H = l^2$. Beschouw de rechterverschuivingsoperator $S(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. Toon aan dat $S^* = T$ met T de linkerverschuivingsoperator $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$. Wat is T^* ?

Puntenverdeling:

1. a: 8, b: 5.
2. a: 5, b: 10, c: 12.
3. a: 5, b: 15, c: 5.
4. a: 10, b: 5, c: 10.

   Gratis: 10, Totaal: 100